

Analytické pravděpodobnostní modely, Markovské procesy



Výkonnost a spolehlivost – KIV/VSP

Richard Lipka

7.10.2014



Motivace

- Andrej Markov (1856 - 1922)

„Budoucnost je nezávislá na minulosti, pokud je dán přesný popis současného stavu“

(Wilkinson, 2006)

- Modelování sekvencí dat



A. A. Markov (1886).



Příklady využití

- Modelování systémů s náhodnými příchody požadavků
 - Lidé ve frontě
 - Telefonní linky
 - Půjčovny aut
 - Vozidla v křižovatce
 - ...
- Vědecké modely
 - Modelování náhodného pohybu molekul
 - Fungování enzymů
 - Modelování burzy
 - PageRank
 - ...



Příklady využití

- Rozpoznávání řeči (převod mluveného slova na text)
 - Slova / fonémy následují v určitých kombinacích po sobě častěji než v jiných
 - I další aplikace – analýza DNA, dešifrování ...
- Generování textů
 - Náhodné texty které vypadají na první pohled smysluplně
 - Chomskybot
 - Mark V Shaney
 - ...



Generátory řeči

Mark V Shaney

It looks like Reagan is going to say? Ummm... Oh yes, I was looking for. I'm so glad I remembered it. Yeah, what I have wondered if I had committed a crime. Don't eat with your assessment of Reagan and Mondale. Up your nose with a guy from a firm that specifically researches the teen-age market.

ChomskyBot

Note that relational information can be defined in such a way as to impose a descriptive fact. So far, the natural general principle that will subsume this case does not affect the structure of a parasitic gap construction. Suppose, for instance, that the systematic use of complex symbols suffices ...

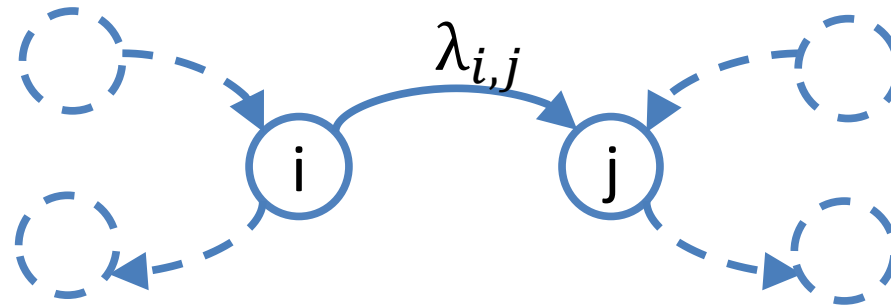


Vlastnosti

- Modelování systémů s jasně určenými
 - stavy (jako u KA – ve stavu všechny vlastnosti systému)
 - přechody (u kterých známe intenzitu / četnost)
- Markovská vlastnost: pravděpodobnost přechodu má exponenciální rozdělení (= model pracuje se spojitým časem)
- Pravděpodobnost stavu závisí jen na předchozím stavu a ne na cestě do něj



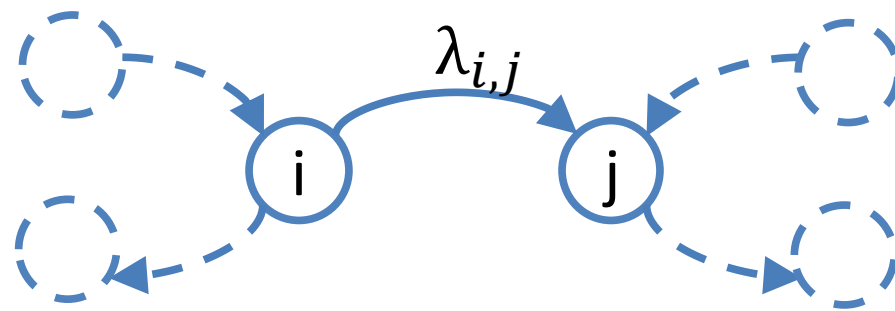
Obecný model



- Intenzita přechodu – $\lambda [1/s]$
 - frekvence přechodů
 - konstantní (jinak nelze řešit analyticky)
- Prvd. přechodu z i do j v malém časovém intervalu je $\lambda \cdot dt$
(podmíněná – musí být ve stavu i)



Obecný model

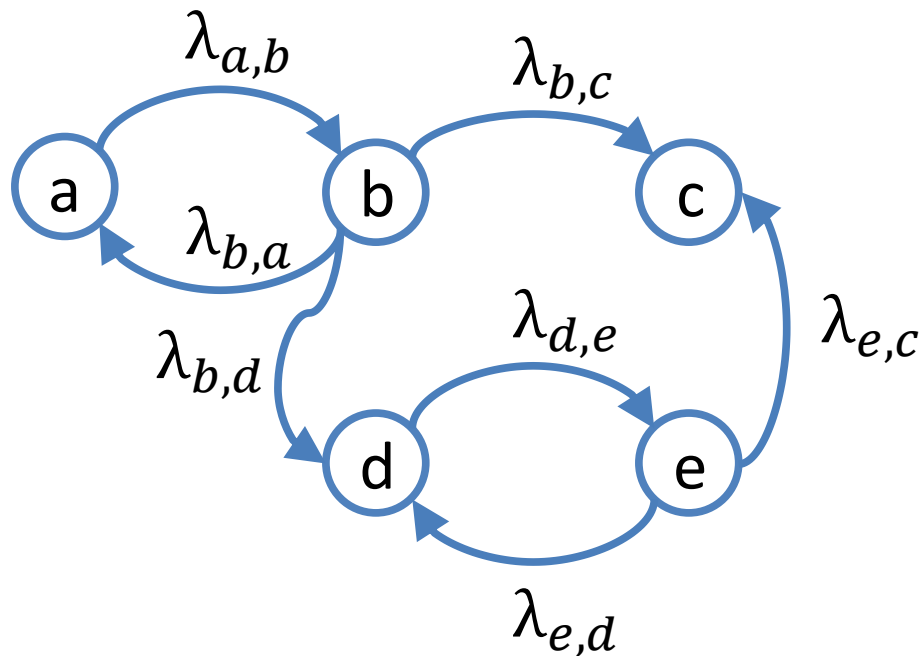


→ je-li prvd. stavu i v čase t rovna $p_i(t)$, je prvd. přechodu $\lambda \cdot p_i(t) \cdot dt$

- nepodmíněná pravděpodobnost přechodu v čase $\langle t, t + dt \rangle$
- ale potřebuji prvd. výskytu ve stavu i



Obecný model



- Popis orientovaným váženým grafem



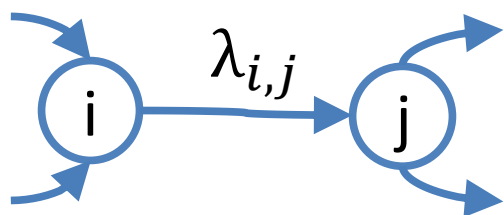
Obecný model

$$\mathbf{P}(k) = \begin{bmatrix} p_{1,1}(k) & p_{1,2}(k) & \dots & p_{1,n}(k) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n,1}(k) & p_{n,2}(k) & \dots & p_{n,n}(k) \end{bmatrix}, \sum_{j=1}^n p_{i,j}(k) = 1$$

- Je-li $X_k = i$ (systém je ve stavu i), pak je $p_{i,j}(k)$ je prvd. přechodu do stavu j (tedy prvd. že $X_{k+1} = j$)
- *Homogenní* proces – $p_{i,j} = p_{i,j}(t_1, t_2) = p_{i,j}(\Delta t)$
- $\lambda_{i,j} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_{i,j}(\Delta t)}{\Delta t}$ - konstantní intenzita přechodu
 $\Delta t \rightarrow 0, p_{i,j}(\Delta t) \cong \lambda_{i,j} \cdot \Delta t$



Obecný model



$$p_i(t + \Delta t) = p_i(t) - \lambda_{i,j} p_{i,j}(t) \Delta t$$

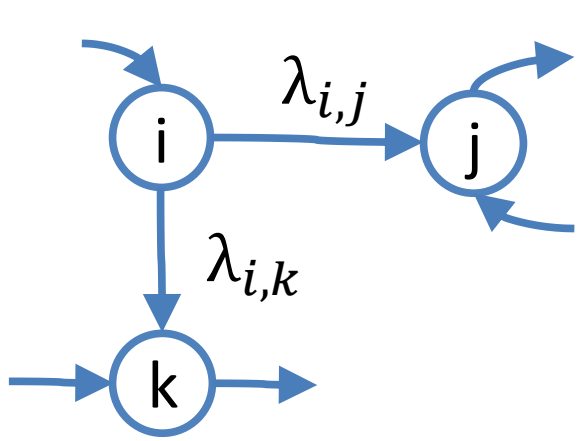
$$\frac{p_i(t + \Delta t) - p_i(t)}{\Delta t} = -\lambda_{i,j} p_i(t)$$

$$p_i'(t) + -\lambda_{i,j} p_i(t) = 0$$

- Lineární diferenciální rovnice prvního řádu
- Počáteční podmínka $p_i(0) = 1$ – někde musím začít
- $p_i(t) = e^{-\lambda_{i,j}t}$ - prvd. setrvání ve stavu i



Obecný model



- Analogicky lze odvodit

$$p'_i(t) = -(\lambda_{i,j} + \lambda_{i,k})p_i(t) = -\lambda_i p_i(t)$$

prvd. setrvání ve stavu i závisí na součtu intenzit odchodů z něj

- Lze odvodit střední dobu setrvání ve stavu i

$$T_i = \frac{1}{\lambda_i}$$
 (což souhlasí s tím že λ_i je frekvence)



Kolmogorovovy rovnice

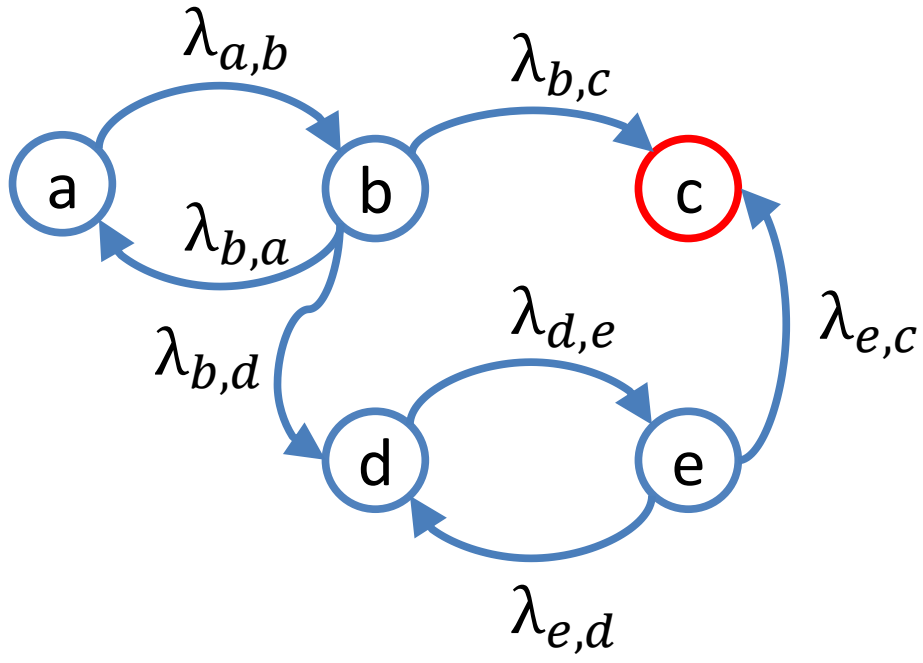
$$\mathbf{p}'(t) = \mathbf{p}(t)\mathbf{\Lambda}$$

- $\mathbf{p}(t)$ je vektor pravděpodobností stavů
- $\mathbf{p}'(t)$ vektor derivací prvd. stavů
- $\mathbf{\Lambda}$ matice intenzit přechodů
 - $\lambda_{i,j}$ pro $i \neq j$ intenzita přechodu z i do j
 - pro $i = j$ je $\lambda_{i,j} = -\lambda_i$ (záporná hodnota součtu ostatních prvků řádku)
→ součet řádku je 0
- Počáteční podmínky – vektor $\mathbf{p}(0)$ - kde začnu





Absorpční stavy



- Stav kde model končí – nevede z něj žádná hrana
 → život modelu je omezený a v některém absorpčním stavu časem skončí (z dlouhodobého pohledu jde jen o to ve kterém)
- Modelování přechodových jevů

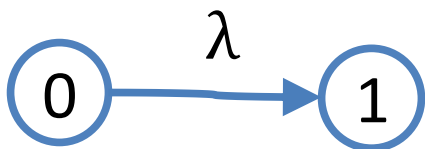


Absorpční stavy - příklad

- Spolehlivostní model 1 prvku bez jeho opravy (např. IO nebo nezálohovaný počítač)
 - Funguje nebo je porouchaný, nebude opraven
 - λ jako intenzita poruchy prvku
 - Pro počítač cca $10^{-4}[\text{hod}^{-1}]$
 - Pro obvod cca $10^{-6}[\text{hod}^{-1}]$
(nepřevádět na čas fungování – prvd. že se zařízení v následující jednotce času porouchá)



Absorpční stavy - rovnice

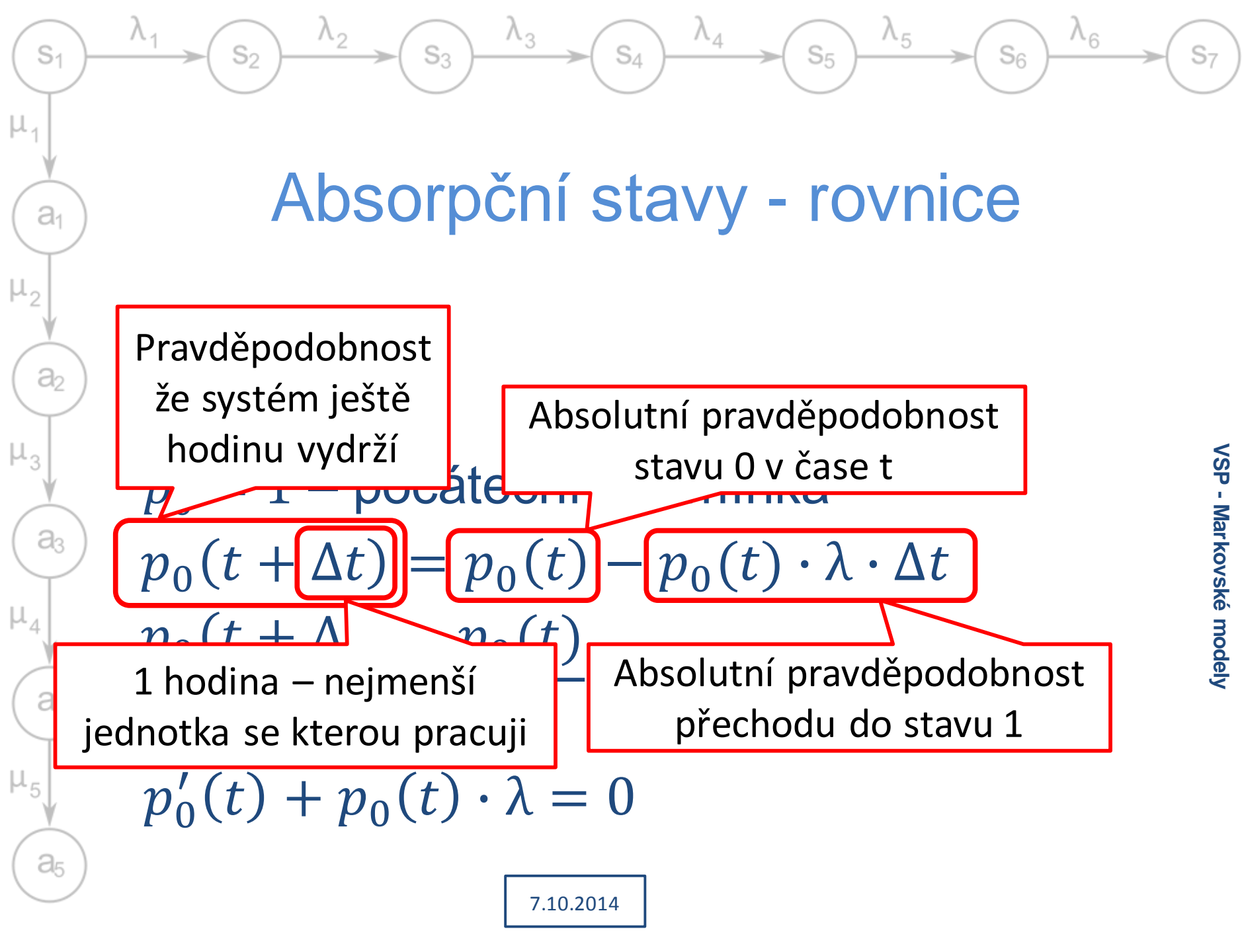


$p_0 = 1$ – počáteční podmínka

$$p_0(t + \Delta t) = p_0(t) - p_0(t) \cdot \lambda \cdot \Delta t$$

$$\frac{p_0(t + \Delta t) - p_0(t)}{\Delta t} + p_0(t) \cdot \lambda = 0$$

$$p_0'(t) + p_0(t) \cdot \lambda = 0$$



Absorpční stavy - rovnice

Pravděpodobnost že systém ještě hodinu vydrží

Absolutní pravděpodobnost stavu 0 v čase t

$$p_0(t + \Delta t) = p_0(t) - p_0(t) \cdot \lambda \cdot \Delta t$$

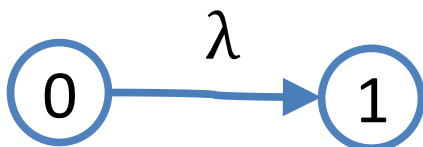
1 hodina – nejmenší jednotka se kterou pracuji

Absolutní pravděpodobnost přechodu do stavu 1

$$p_0'(t) + p_0(t) \cdot \lambda = 0$$



Absorpční stavy - rovnice



Derivace p_0 podle času
– viz definice derivace

podmínka

$$p_0(t + \Delta t) - p_0(t) - p_0(t) \cdot \lambda \cdot \Delta t$$

$$\frac{p_0(t + \Delta t) - p_0(t)}{\Delta t} + p_0(t) \cdot \lambda = 0$$

$$p_0'(t) + p_0(t) \cdot \lambda = 0$$

Lineární diferenciální rovnice 1. řádu s konstantními koeficienty



Absorpční stavy - rovnice

$$p'_0(t) + p_0(t) \cdot \lambda = 0$$

Navíc víme že platí

$$p_0(t) + p_1(t) = 1 - \text{jiné stavy nejsou}$$

a doplníme počáteční podmínku $p_0(0) = 1$

řešení (metodou charakteristické rovnice):

$$p_0(t) = e^{-\lambda t}, \quad p_1(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$



Absorpční stavy – kdy dojde k přechodu



- τ – doba za kterou dojde k poruše (př. z 0 do 1)
- $p_1(\tau)$ – prvd. že k poruše došlo – $P\{\tau \leq t\} = F(t)$
 - Distribuční funkce náh. doby poruchy τ

$$F(t) = p_1(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$
 - Hustota pravděpodobnosti (derivace dist. fce)

$$f(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t}$$
 → náhodná doba poruchy má exponenciální rozdělení
- $E\{\tau\} = \frac{1}{\lambda}$ - vlastnost exp. rozdělení (odhad pro konstantní λ)



Zobecnění modelu s absorpčními stavy

- Soustava lin. dif. rovnic 1. řádu, pro každý stav 1 rovnice \rightarrow získám n rovnic pro stavy
- Pro i -tý stav
 - Levá strana: $p_i'(t)$
 - Pravá strana: součet „příspěvků λ “ ve tvaru
 - $+ p_k(t) \cdot \lambda_{k,i}$ - hrany do stavu i
 - $- p_i(t) \cdot \lambda_{i,k}$ - hrany vedoucí ze stavu i
- Počáteční podmínky $p_i(0)$ pro všechny stavy \rightarrow určím všechna $p_i(0)$





Zobecnění modelu s absorpčními stavy

- Náhodná doba setrvání ve stavu v každém stavu i má exp. rozdělení
- Parametr λ_i
 $\lambda_i = \sum_{j=0}^n \lambda_{i,j}$ - součet hran vedoucích ven
- Střední doba setrvání ve stavu i

$$T_i = \frac{1}{\lambda_i}$$





Markovské modely bez absorpčních stavů (cyklické)

- Graf složený z cyklů → nekonečný život modelu
 - v jakém stavu bude v určitém čase?
- Graf musí být silně souvislý
 - odkudkoliv se dá dostat kamkoliv (neexistují podgrafy odkud se nedá dostat – „absorpční skupiny“)
- Lze určit limitní pravděpodobnosti stavů $p_0(\infty), p_1(\infty), \dots, p_n(\infty)$ (dále jen p_0, p_1, \dots, p_n) snáze než soustavou dif. rovnic





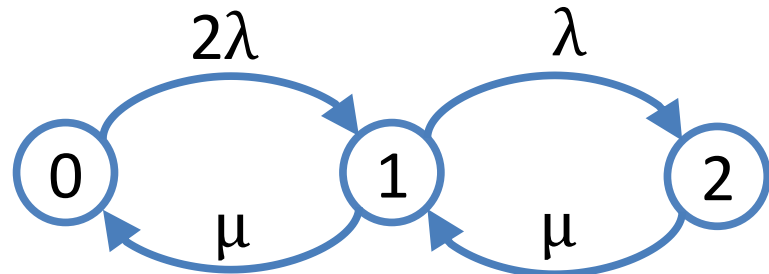
Jak zjednoduřit výpočet

- Jestliže existují hodnoty limitních pravděpodobností, odpovídající derivace jsou nulové (prvd. se už nemění)
 - pro $t \rightarrow \infty$ přejde popis modelu na soustavu lineárních rovnic, $p'_i(\infty) = 0$, p_1, \dots, p_n budou jen neznámé, ne funkce:
- $\mathbf{0} = \mathbf{p} \Lambda$
 - kde $\mathbf{0}$ je nulový vektor a $\mathbf{p} = [p_1, \dots, p_n]$
 - Pro řešení nutné doplnit normalizační podmínku $\sum_{i=1}^n p_i = 1$, která nahradí libovolnou z rovnic





Příklad – synchronizace procesů



- 2 vlákna, paralelní, každé na svém procesoru
- 1 kritická sekce do které obě potřebují
- Parametry τ_{loc} a τ_{sec} náhodné a s exp. rozdělením

Lokální výpočet
(doba τ_{loc} , střední doba T_{loc})

$$\lambda = \frac{1}{T_{loc}}$$

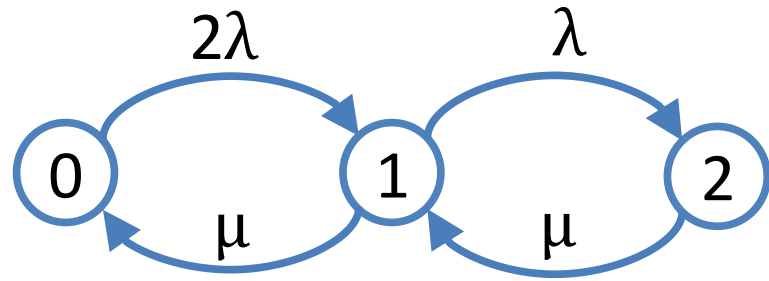
Lokální výpočet
(doba τ_{sec} , střední doba T_{sec})

$$\mu = \frac{1}{T_{sec}}$$

VSP - Markovské modely



Příklad – synchronizace procesů



- 0 – oba lokálně
- 1 – 1 v krit. sekci, druhý lokálně
- 2 – 1 čeká na krit. sekci, druhý čeká

Lze určit $p_0(t), p_1(t), p_2(t)$:

$$\begin{aligned}
 p_0'(t) &= -2\lambda p_0(t) + \mu p_1(t) \\
 p_1'(t) &= 2\lambda p_0(t) - (\mu + \lambda)p_1(t) + \mu p_2(t) \\
 p_2'(t) &= \lambda p_1(t) - \mu p_2(t)
 \end{aligned}$$

Pro poč. podmínky $p_0(0) = 1, p_1(0) = p_2(0) = 0$



Příklad – synchronizace procesů



VSP - Markovské modely

- U non-stop dějů hledáme obvykle ustálené (asymptotické) prvd. stavů
- Nejprve určíme limity derivací (ustálený stav!)

$$p_0(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e_0(t) = p_0(p_1, p_2)$$

$$p'_0(\infty) = 0, p'_1(\infty) = 0, p'_2(\infty) = 0$$

→ soustava se mění na soustavu lineárně závislých algebraických rovnic (= jejich součet je 0)

- Zavádíme normalizační podmínku $p_0 + p_1 + p_2 = 1$ - v nějakém stavu systém být musí



Příklad – synchronizace procesů



$$\begin{aligned}
 0 &= -2\lambda p_0 + \mu p_1 \\
 0 &= 2\lambda p_0 - (\mu + \lambda)p_1 + \mu p_2 \\
 0 &= \lambda p_1 - \mu p_2 \\
 1 &= p_0 + p_1 + p_2
 \end{aligned}$$

- 3 neznámé, 3 rovnice, lze řešit Gaussovou eliminací (Matlab)
- Význam: $p_2 = 0,05 \rightarrow$ model stráví v p_2 5% času
- Platné jen pro ustálený stav (při dlouhodobém sledování) !



Určení zpomalení vlivem konfliktů na KS

- Stoupne počet konfliktů na KS – jak moc se zpomalí celý systém?
- 2^* víc konfliktů \rightarrow





Zobecnění modelu bez absorpčních stavů

- Z grafu lze odvodit soustavu lineárních rovnic (podobná pravidla jako u diferenciálních) → lze získat vektor p_i ustálených pravděpodobností
- Stále platí že doba setrvání ve stavu má exponenciální rozdělení s parametrem λ_i (součet intenzit odchodů z daného stavu), respektive střední dobou setrvání ve stavu $T_i = \frac{1}{\lambda_i}$
- Děj je cyklický → lze určovat frekvence přechodů mezi stavy





Frekvence přechodů

- Střední frekvence přechodů po dané hraně z i do j

$$f_{i,j} = p_i \cdot \lambda_{i,j}$$

- Střední frekvence průchodů stavem $f_i = p_i \cdot \sum_{j=0}^n \lambda_{i,j} = p_i \cdot \lambda_i$ (intenzita výstupních hran)

- Střední doba cyklu průchodů stavem i
 $T_{ci} = \frac{1}{f_i}$ (jak často se stav opakuje)



Nástroj Markov

- Nástroj pro vyhodnocování markovských modelů
 - DP Radka Hoštičky a Marka Pašky
- K dispozici na portálu
 - Spustitelný program
 - Dokumentace (stručný návod + DP Marka Pašky s podrobným popisem programu i teorie Markovských modelů)
- Pro modely bez absorpčních stavů, s konstantními koeficienty, popsané silně souvislým grafem



Nástroj Markov

- Definice modelu

- Jazyk pro popis grafů (uzly a intenzity přechodů mezi nimi)

- Podobný jazyku C, podporuje cykly pro vytvoření grafu (snazší než mít GUI pro velké modely)

- Vypočte ustálené pravděpodobnosti

- Dotazování nad modelem

- „kombinace SQL a C“ – deklarativní jazyk pro dotazy nad zpracovaným modelem

- Definované matematické funkce a cykly, řazení výsledků, agregační funkce





Definice modelu

- Lze definovat konstanty
`#define lambda 0.9`
- Stavy definovány v souřadné mřížce modelu (n dimenzí)
`module model1 [10, 10]`
 stavy lze označit vlastními čísly
`[1, 1] = 1;`
- Mezi stavy jde nastavit přechody
`[1, 1] -> 0.9 [1, 2];`



Definice modelu – příklad



```
module bufferexample [200];
```

Definice konstant

```
#define size 200
#define lambda 0.9
#define mi 1.0
```

Přechody v jednom směru (zprava doleva)

```
for (i ;0; size-2) {
    [i]->lambda [i+1];
}
```

Přechody v opačném směru (zleva doprava)

```
for (i; 0; size-2) {
    [i+1]->mi [i];
}
```



Řešení modelu

- `model.map` – transformace z prostoru stavů (n-rozměrné mřížky) do matice přechodů
- `model.mtx` – popis matice přechodů mezi stavy modelu
- `model.val` – uživatelská ohodnocení stavů
- `model.pbt` – pravděpodobnosti stavů (výsledek výpočtu)
- `model.err` – protokol o případných chybách



Dotazování

- **Nutné načíst model**
`load "C:\Models\model1" as buf`
- **Lze definovat konstanty**
`define size := 200;`
- **Lze se dotazovat na pravděpodobnosti**
`select p[0] from buf`



Děkuji za pozornost

- Příště modelování systémů hromadné obsluhy